ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΥΛΗ: Πράξεις με διανύσματα

1). Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ και δύο σημεία O_1, O_2 του χώρου. Αν A_1, A_2 και B_1, B_2 είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των A και B ως προς τα O_1, O_2, να αποδειχθεί ότι:

i). $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$

ii). $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$

2). Αν είναι $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$, να δείξετε ότι:

i). $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

ii). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

3). i). Αν Ο είναι κέντρο παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ και Μ τυχαίο σημείο του χώρου, να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MO}$

ii). Να βρείτε σημείο Κ του επιπέδου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ για το οποίο είναι:
$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} = \vec{0}$

4). Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ που ορίζονται από τις ισότητες:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \qquad \overrightarrow{O\Gamma} = 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$$

είναι συνευθειακά.

5). Έστω Ο, Α, Β, Γ σημεία του χώρου. Αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ με

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \text{ και } \qquad \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = 0,$$

να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά σημεία.

6). Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 7\overrightarrow{O\Gamma}$, να δείξετε τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β. Να βρείτε επίσης τον αριθμό λ ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{A\Gamma} - \lambda\overrightarrow{\Gamma B} = 0$.

7). Έστω Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε να είναι $\overrightarrow{O\Gamma} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

8). Έστω G και G’ τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

9) Δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου με κέντρο Ο τέμνονται στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{OM}.$$

10) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και μη παράλληλα.

i) Αν ισχύει ότι $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$ (όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί), να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

ii) Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \mu\vec{\alpha} + \nu\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\kappa = \mu$ και $\lambda = \nu$.

11) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε το ίδιο και για τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$.

12) Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - (\lambda + 1)\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

13) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που δεν είναι παράλληλα ανά δύο. Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} // \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} // \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

14) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Δ της ΒΓ με $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το σημείο τομής της ΒΕ με την ΑΓ, να εκφράσετε το $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ως συνάρτηση του . $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

15) Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός κ τέτοιος ώστε:
$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \kappa\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-\kappa)\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

16) Έστω τρία συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ. Σε κάθε σημείο Μ του χώρου αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα:
$f(\mathrm{M}) = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \beta \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \gamma \cdot \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$

17) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{EZ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)$.

18) Τα σημεία Μ και Ν διαιρούν το τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα μέρη. Για οποιοδήποτε σημείο Ο του χώρου, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ και $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

19) Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει ότι $2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, είναι συνευθειακά και να βρείτε τους αριθμούς λ και μ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$, και $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

20) Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και Ο είναι ένα σημείο του χώρου, να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ με $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$, τέτοιοι ώστε να ισχύει:
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ και $\lambda_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \lambda_3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{0}$.

21) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το σημείο Ε της ΑΓ με $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και το σημείο Δ της διαμέσου ΑΜ με $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

22) Αν σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}, \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}, \overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}, \overrightarrow{\mathrm{EZ}}, \overrightarrow{\mathrm{ZA}}$.

23) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

24) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

****

25) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

26) Να εξετάσετε πότε ισχύουν οι ισότητες:

i) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$,

ii) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right|$.

****