

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ: Πολυώνυμα – Σχήμα Horner

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $[P(x)]^2 = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.
2. Θεωρούμε δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.
 - i) Αν $Q(x) = P(P(x))$ και ο αριθμός α είναι ρίζα του $P(x) - x$, να αποδείξετε ότι ο α είναι ρίζα και του $Q(x) - x$.
 - ii) Αν τα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα, να αποδείξετε ότι συμβαίνει το ίδιο και με τα πολυώνυμα $P(x) + Q(x)$ και $P(x) - Q(x)$.
3.
 - i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού τέτοιο, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει $P(x) - P(x-1) = x^2$ και το $P(x)$ να έχει ρίζα το μηδέν.
 - ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, όπου n θετικός ακέραιος.
4.
 - i) Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$ για κάθε x με $x \neq 0$ και $x \neq -1$;
 - ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.
5. Αν δύο πρωτοβάθμια πολυώνυμα παίρνουν τις ίδιες τιμές για δύο διαφορετικές τιμές της μεταβλητής x , να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.
6. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = x^6 + 2x^5 - x^3 + 7x - 2$ με το $x - 2$, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner.
7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντες τα διώνυμα $x - 1$, $x + 2$ και μετά να αναλύσετε το $P(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
8. Αν οι διαιρέσεις $P(x):(x+1)$ και $P(x):(x-2)$ δίνουν υπόλοιπο 2 και -3 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2 - x - 2)$.
9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, όπου n θετικός ακέραιος, διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$.
10. Αν $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(4x - 5)$.

